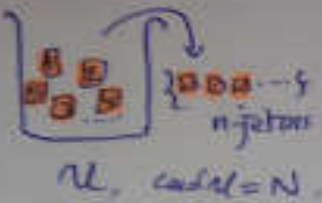


Corrège-type TD 04

Variables aléatoires et lois de probabilités discrètes

Exercice 01

Dans une urne U on a: N jetons $1, \dots, N$

[A] 

$U, \text{card} U = N.$


• $n \leq N$

• X : une variable aléatoire définie par:

X : "le plus grand numéro tiré parmi n -jetons tirés simultanément"

Exemples

cas 1: $N=5, n=2$




$\Omega = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \}$

$\text{card } \Omega = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

$X = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{2}, 3, 4, \underset{\substack{\uparrow \\ N}}{5} \}$

cas 2: $N=4, n=3$



$\Omega = \{ \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \}$

$\text{card } \Omega = C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4}{1} = 4$

$X = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{3}, \underset{\substack{\uparrow \\ N}}{4} \}$

Alors, les valeurs de X sont:

$X \in \{ n, (n+1), (n+2), \dots, N \}$

on sait que: tirage simultané \Leftrightarrow la méthode utilisée est les combinaisons.

Alors, la petite valeur possible de X est n puisque on a une combinaison de n -éléments

$n \leq X$ initial $\leq N$

$n \leq X \leq N$

cas 1: $n=2, \dots, N=5$

cas 2: $n=3, \dots, N=4$

13 La loi de probabilité de X . on peut que
 $X \in \{n, (n-1), (n-2), \dots, N\}$

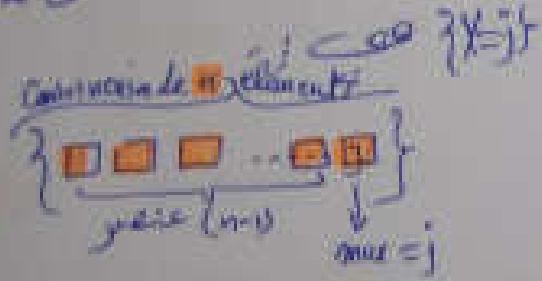
Dans le cas général, on a:

$$P(X=j) = \frac{C_{n-1}^{j-1}}{C_N^n}$$

où $j \in \{n, (n-1), \dots, N\}$

شرح:
 عدد الحالات الكلية لسحب n عنصر من N عنصر فقط، وهذه هي التوزيعية C_N^n من N من n .

عدد الحالات المحققة للحالة



عند سحب n اختيار التوزيعات n يكون $n-1$ عنصر، توزيعية $C_{n-1}^{(n-1)}$ من كل الأرقام الأصغر منه إلى غاية العدد n وهي:

عدد $(n-1)$ عنصر $\{1, 2, \dots, (n-1)\}$
 إذن عدد الطرق هو C_{n-1}^{n-1}

Exemples

Cas 1.
 $N=5, n=2$

عدد $n = C_5^2, X \in \{2, 3, 4, 5\}$
 $= 10$

$$P(X=2) = \frac{\text{Nbr de cas favorable}}{\text{Nbr de cas possible}} = \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{C_5^2} = \frac{C_4^1}{C_5^2}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$$

$$= \frac{2}{10} = \frac{C_4^2}{C_5^2}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$$

$$= \frac{3}{10} = \frac{C_4^3}{C_5^2}$$

$$P(X=5) = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$$

$$= \frac{4}{10} = \frac{C_4^4}{C_5^2}$$

Par la suite:

$X \in$	2	3	4	5	
$P(X=j)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\sum_{j=2}^5 P(X=j) = 1$

Alors, en déduisant,
 $Y \in \{0, 1, \dots, N-n+1\}$

بنفسه ملكه انه مثلا يمكننا
 ان نعتبر (n-1) كعدد أكبر من
 N (عدد العناصر)

[3] la loi de Y:

$$P(Y=j) = \frac{C_{N-j}^{n-1}}{C_N^n}$$

$\{0, 1, \dots, N-n+1\}$
 = عناصر

عدد (كعدد) العناصر =
 $\{0, 1, 2, \dots, N-n+1\}$

لما يكون العدد $Y=j$ هو min
 وعلية نختار (n-1) المتبقية من
 كل الأرقام أكبر من j أو
 عناصر العدد N.

$$N - (j+1) + 1 = N - j - 1 + 1 = N - j$$

القامعة: $(0, 1, 2, \dots, N-j)$

Résumé.

⊙ la loi de X:
 $X \in \{0, n+1, \dots, N\}$
 $P(X=j) = \frac{C_{j-1}^{n-1}}{C_N^n}$

⊙ la loi de Y:
 $Y \in \{0, 1, \dots, N-n+1\}$
 $P(Y=j) = \frac{C_{N-j}^{n-1}}{C_N^n}$

Exercice 02 (Loi Bernoulli)

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité

X: une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p

$X \sim \mathcal{B}(1, p)$ (X suit la loi de Bernoulli)

$X(\Omega) = \{0, 1\}$; $p+q=1$

$\int P(X=1) = p$ Succès
 $\int P(X=0) = 1-p=q$ Echec

X_i	0	1
P_i	$1-p$	p

$E(X) = p$?

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P_i = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$

L'espérance de la variable de Bernoulli est $E(X) = p$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^n X_i^2 P_i - (E(X))^2$$

$$= [0^2(1-p) + 1^2 p] - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = p q$$

La variance de la variable de Bernoulli est

$$\text{Var}(X) = p q = (1-p)p$$

Exercice 03 (Loi Binomiale)

La Loi de probabilité d'une v.a. X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est donnée par:

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ où } q = 1-p$$

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (X suit la loi de binomial) $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$1) \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = 1?$$

$$\sum_{k=0}^n P(X=k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n$$

formule de binôme
de Newton

$$= (p+(1-p))^n = 1$$

$$2) \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} ?$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \frac{k n!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k n (n-1)!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= n p \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= n p \underbrace{\sum_{a=0}^{n-1} P(X=a)}_{=1} = n p \end{aligned}$$

$a = k-1$
 $k = n-1$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = ?$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = n \sum_{k=1}^n \frac{k(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^n \frac{k(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^n \frac{(k+1-1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k}$$

$$= np \left[\underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k}}_1 + \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \right]$$

$$= np + np \sum_{k=2}^n \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k}$$

$$= np + np \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2+1-1} q^{n-k}$$

$$= np + n(n-1)p \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k}$$

$$= np + n(n-1)p^2 = np [(n-1)p + 1]$$

$$3) E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = np[(n-1)p + 1] - (np)^2 \\ &= np(1-p) = npq \end{aligned}$$

Exercice 04 (Loi géométrique)

À chaque succès n est égale à p
 X une v.a. suit une Loi géométrique notée par

$G(p)$;

$$k \in \{1, 2, \dots, \infty\} \quad \mathbb{P}(X=k) = p q^{k-1}$$

$$q = 1 - p$$

$$1) \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X=k) = 1 ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}$$

série géométrique

convergente car

$$-1 < 1-p < 1$$

Remarque:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{si } |a| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a} \quad \text{si } |a| < 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) &= p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \quad j = k-1 \\ &= p \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1 \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} ?$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$$

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = p \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p} \quad E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2} ?$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (k(k-1) + k) (1-p)^{k-1}$$

$$= p \left[\sum_{k \geq 1} k(k-1) (1-p)^{k-1} + \sum_{k \geq 1} k (1-p)^{k-1} \right]$$

$$= p (1-p) \sum_{k \geq 2} k(k-1) (1-p)^{k-2} + p \sum_{k \geq 1} k (1-p)^{k-1}$$

Série géométrique dérivée

qui converge $0 < 1-p < 1$

$$= p(1-p) \cdot \frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} = \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p}$$

$$E(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{2 - 2p + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

Exercice 05 (Loi de Poisson)

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \geq 0$) et $X(\omega) = \{0, 1, 2, \dots\}$ tels que $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$; on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1 ?$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$5 \ E(X) = \lambda ?$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$
$$\lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

$$6 \ \text{Var}(X) = \lambda ?$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}$$
$$= \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \right] \quad \text{en posant } j = k-1$$
$$= \lambda \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{(j-1)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \right] \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j) = 1$$
$$= \lambda(\lambda + 1)$$

$$\text{Var}(X) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

Exercice 07

exercice N°7.

Z : var. a. n définie par: $a > 0$

① ... $P(Z=n) = \frac{a}{n} P(Z=n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

هنا قانون احتمالات متكرر
بعلامة تراجيع فقط
من أجل $n \in \mathbb{N}^*$

② $P(Z=n)$ en fonction de $P(Z=0)$:

on sait que: $P(Z=n) = \frac{a}{n} P(Z=n-1)$

$$= \frac{a}{n} \cdot \left[\frac{a}{n-1} P(Z=n-2) \right]$$

$$= \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n-2} \cdots \frac{a}{2} P(Z=0)$$

$$= \frac{a^n}{1 \cdot 2 \cdots (n-2)(n-1) \cdot n} P(Z=0) = \frac{a^n}{n!} P(Z=0)$$

Alors $P(Z=n) = \frac{a^n}{n!} P(Z=0)$.

③ La valeur de $P(Z=0)$. on sait que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P(Z=j) = 1$$

لأن مجموع الاحتمالات متساوية
من 0 وليس من 1.

soit que $P(Z=j) = \frac{a^j}{j!} P(Z=0)$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a^j}{j!} P(Z=0) = 1 \Rightarrow P(Z=0) \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a^j}{j!} = 1$$

④ حسب العلاقة التراجيع

$$\Rightarrow P(Z=0) \cdot e^a = 1 \Rightarrow P(Z=0) = e^{-a}$$

⑤ on a $P(Z=j) = \frac{a^j}{j!} P(Z=0) = \frac{a^j}{j!} e^{-a} = \frac{e^{-a} a^j}{j!}$, $j \in \mathbb{N}$
c'est la loi de Poisson de paramètre a .

Exercice 08

X : une variable aléatoire (int \mathbb{N})

$$P(X=n) = p \cdot q^{n-1} \quad \text{ou} \quad q = 1-p, \quad p \in]0,1[$$

① La valeur de $P(X > m)$ ou $m \in \mathbb{N}$.

تذكير

ما $P(X > m) = \sum_{j=m+1}^{\infty} P(X=j)$

ملاحظة

$$= \sum_{j=m+1}^{\infty} p \cdot q^{j-1} \quad p: \text{constante}$$

$$= p \cdot \underbrace{\sum_{j=m+1}^{\infty} q^{j-1}}_{\text{سلسلة جبرية}} \quad |q| < 1$$

$$= p \cdot q^m \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$= q^m \cdot p \cdot \frac{1}{p} = q^m$$

• $P(X > m) = 1 - P(X \leq m)$

ملاحظة

$$= 1 - \sum_{j=0}^m P(X=j)$$

$$= 1 - p \sum_{j=0}^m q^{j-1}$$

($j=1$)

$$= 1 - p \cdot q^0 \cdot \frac{1-q^{m+1}}{(1-q)} \quad |q| < 1$$

$$= 1 - p \cdot \frac{1-q^{m+1}}{p}$$

$$= 1 - (1 - q^{m+1}) = q^{m+1}$$

on sait que

$$\sum_{i=0}^n a^i = a^0 + a^1 + \dots + a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\sum_{i=0}^n a^i = a^1 + \dots + a^n = a \frac{1-a^n}{1-a}$$

ou

$$\sum_{i=0}^n a^i = a^p + a^{p+1} + \dots + a^{p+n} = a^p \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a} \quad |a| < 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{a}{1-a} \quad |a| < 1$$

ou

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{a^p}{1-a} \quad |a| < 1$$

ملاحظة: فنحن أن نتغير متوالي

X يتبع القانون الهندسي (p)

إذا كان X يمثل في تجربة ما

عند التجارب الأربعة المحاول

على أول نجاح

احتمال $P(X=n)$ هو احتمال الحصول

على أول نجاح في التجربة، وقد n

$$\textcircled{e} \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2: \quad P(X > n+m | X > n) = P(X > m)$$


on suit la probabilité conditionnelle de A sachant que B

$$\text{est } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

$\{X > n+m\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) > n+m\}$ c'est un événement de même pour $\{X > n\}$, et $\{X > m\}$.

$$P\{X > n+m | X > n\} = \frac{P\{X > n+m\} \cap \{X > n\}}{P\{X > n\}}$$

Où $n, m \in \mathbb{N}$, $n+m > n$



$$\text{On a } \{X > n+m\} \cap \{X > n\} = \{X > n+m\}$$

$$\Rightarrow P(X > n+m | X > n) = \frac{P(X > n+m)}{P(X > n)}$$

d'après la question \textcircled{d} ,

$$\begin{cases} P(X > n+m) = q^{n+m}, & n+m \in \mathbb{N} \\ P(X > n) = q^n, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors on déduit,

$$P(X > n+m | X > n) = \frac{q^{n+m}}{q^n} = \frac{q^n \cdot q^m}{q^n} = q^m$$

d'après question \textcircled{d} ,

$$= P(X > m)$$

مثلاً: (Mnemonic de mémoire) هذه التسمية توحي أن النتيجة لا تتغير
والمبدأ 0, 1 و (n+m) و (n) بل يتطابق بينهما (n+m) - n = m